

CONCURSUL JUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „PETRU MAIOR”

Colegiul „Petru Maior” Reghin

EDIȚIA a II-a, 9.04.2022

Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ȘI CORECTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_4 = b_1 q^3 = 2 \cdot \sqrt{5}^3 = 10\sqrt{5} = \sqrt{500}$ $484 < 500 < 529 \Rightarrow 22 < \sqrt{500} < 23$, deci partea întreagă a lui b_4 este egală cu 22	2p 3p
2.	$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(f(x)) = x \Leftrightarrow 2f(x) - 3 = x \Leftrightarrow 2(2x - 3) - 3 = x$ $x = 3$	3p 2p
3.	$\log_2 \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2} = 2 \Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 2x^2 - 2x + 4$ $x = 1$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale de două cifre care au suma cifrelor un număr divizibil cu 11 sunt 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 și 92, deci sunt 8 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$	2p 2p 1p
5.	$\vec{u} + \vec{v} = (1+a)\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} ^2 = (1+a)^2 + 1$ Cum $ \vec{u} ^2 = 2$ și $ \vec{v} ^2 = a^2 + 4$, obținem $a^2 + 2a + 2 = 2 + a^2 + 4$, deci $a = 2$	2p 3p
6.	$(\sin x + \cos x)^2 = 2\cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow \sin 2x = \cos 2x$ $\text{tg } 2x = 1$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $2x = \frac{\pi}{4}$, deci $x = \frac{\pi}{8}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(4) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(4)) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 4 + 21 + (-8) - (-14) - 2 - 24 = 5$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = 5a - 15$, pentru orice număr real a Matricea $A(a)$ nu este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a)) = 0$, deci $a = 3$	2p 3p
c)	Pentru $a = 3$ soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(1 + 5\alpha, -1 - 13\alpha, \alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ $z_0^2 = x_0 + y_0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 8\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -8$ sau $\alpha = 0$, deci $(x_0, y_0, z_0) = (-39, 103, -8)$ sau $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$	3p 2p

2.a)	$4 * 3 = \sqrt{4^{\log_3 3}} =$ $= \sqrt{4} = 2$	3p 2p
b)	$x * 9 = \sqrt{x^{\log_3 9}} = \sqrt{x^2} = x$, pentru orice $x \in G$ $9 * x = \sqrt{9^{\log_3 x}} = \sqrt{3^{2 \log_3 x}} = \sqrt{(3^{\log_3 x})^2} = \sqrt{x^2} = x$, pentru orice $x \in G$, deci $e = 9$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	2p 3p
c)	$x * x = e \Rightarrow \sqrt{x^{\log_3 x}} = 9 \Rightarrow x^{\log_3 x} = 81 \Rightarrow \log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81$, deci $\log_3^2 x = 4$ $\log_3 x = -2$ sau $\log_3 x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$, care nu convine; $x = 9$, care convine	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{e^x \sqrt{x^2+1} - e^x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$ $= \frac{e^x(x^2+1) - xe^x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{e^x(x^2-x+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{x} \right)$ Cum $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2$, obținem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = 2$	2p 3p
c)	$f'(x) > 0$, pentru orice număr real $x \Rightarrow f$ este strict crescătoare $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă, deci $\text{Im } f = (0, +\infty)$	2p 3p

2.a)	$\int_0^3 f^2(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big _0^3 =$ $= 9 + 6 = 15$	3p 2p
b)	$0 \leq I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx = \int_0^1 x^n \sqrt{x^2+2} dx \leq \sqrt{3} \int_0^1 x^n dx = \sqrt{3} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _0^1 = \frac{\sqrt{3}}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n Cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}}{n+1} = 0$, obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$	3p 2p
c)	$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x^2+2} dx = \int_0^1 \frac{x^n (x^2+2)}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_0^1 x^{n+1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx + 2 \int_0^1 x^{n-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx =$ $= \int_0^1 x^{n+1} (\sqrt{x^2+2})' dx + 2 \int_0^1 x^{n-1} (\sqrt{x^2+2})' dx = \sqrt{3} - (n+1)I_n + 2\sqrt{3} - 2(n-1)I_{n-2}$ și obținem $(n+2)I_n + 2(n-1)I_{n-2} = 3\sqrt{3}$, pentru orice număr natural n , $n \geq 3$	2p 3p